

**SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERÍA HIDRÁULICA**  
**XXII CONGRESO CHILENO DE INGENIERÍA HIDRÁULICA**

**ECUACIONES DE ONDA LARGA EN CANALES DE SECCIÓN  
ARBITRARIA CON CURVATURA Y BIFURCACIONES**

**PATRICIO WINCKLER GREZ <sup>1</sup>**  
**PHILIP L.-F. LIU <sup>2</sup>**

**RESUMEN**

Se presentan los resultados del desarrollo teórico e implementación numérica de una teoría de propagación de ondas largas en canales de sección arbitraria, con curvatura en el plano horizontal y bifurcaciones. El estudio de este tipo de ondas es relevante en muchas aplicaciones de ingeniería, como la evolución de tsunamis en fiordos o la propagación de ondas en ríos, entre otros. Esta teoría surge de la generalización de una teoría desarrollada para canales rectos (Winckler y Liu, 2015), considerando un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales ubicado en uno de los bordes del canal. Las ecuaciones de movimiento para un fluido no viscoso e incompresible se integran en la sección transversal del canal, reduciendo el problema de tres a una dimensión. Utilizando un método de perturbación y la aproximación de Boussinesq, se obtienen ecuaciones de conservación de la masa y momento, cuyas incógnitas son la desnivelación media de la superficie y la velocidad longitudinal promedio en la sección. Se incorporan asimismo los efectos de la viscosidad en la capa límite, siguiendo la propuesta de Liu y Orfila (2004), cuya aplicación es válida para ensayos de laboratorio. Se presenta un ejemplo de aplicación de ondas propagándose en un canal recto con una playa plana (Liu et al. 2006) y un segundo ejemplo que considera la unión de tres canales con geometría rectangular.

---

<sup>1</sup> Profesor Adjunto, Escuela de Ingeniería Civil Oceánica, Universidad de Valparaíso- [patricio.winckler@uv.cl](mailto:patricio.winckler@uv.cl)

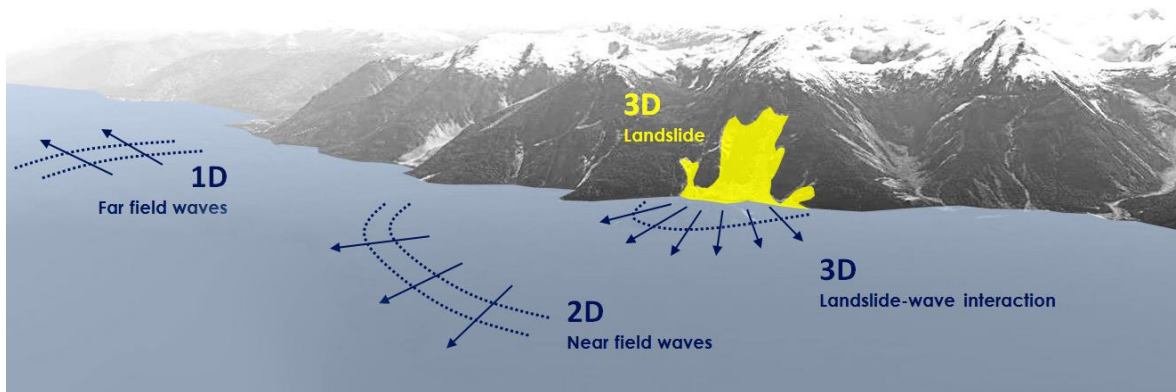
<sup>2</sup> Profesor Titular, School of Civil and Environmental Engineering, Cornell University - [pll3@cornell.edu](mailto:pll3@cornell.edu)

## 1. MOTIVACIÓN

El estudio de la dinámica de ondas largas en canales, ríos y fiordos es útil para el diseño de medidas de mitigación contra el daño de instalaciones costeras afectas a oleaje o tsunamis. Las remociones en masa, por ejemplo, son potenciales fuentes de generación de ondas destructivas en estos cuerpos de agua, que a su vez se caracterizan por una geomorfología intrincada con curvas cerradas y bifurcaciones. Estas ondas se propagan largas distancias desde la fuente, provocando *runups* de hasta decenas de metros (e.g. Harbitz *et al.*, 2014).

La evolución de un tsunami generado por una remoción en masa, desde su generación hasta su propagación en el campo lejano, se esquematiza en la Figura 1. En el campo cercano, la interacción entre la masa en movimiento y el agua es altamente compleja debido a fenómenos asociados a la rotura, la turbulencia y la incorporación de aire. En esta región, el flujo es esencialmente tridimensional (3D). Al alejarse de la fuente, las ondas decaen en amplitud como consecuencia de la dispersión angular y de las mayores profundidades que inducen un asomeramiento inverso. Las ondas evolucionan hacia un régimen bidimensional (2D) en el que tanto la dispersión de frecuencia y no linealidad son débiles, pero no despreciables. En el campo lejano los frentes de onda se alinean al eje principal de fiordo, y el flujo se torna aproximadamente unidimensional (1D). Es en esta región que las principales características de flujo pueden ser capturadas por ecuaciones débilmente no-lineales y dispersivas (i.e. régimen de Boussinesq), promediadas en la sección transversal del canal. Este régimen de onda, foco de la presente investigación, permite describir otros fenómenos como la propagación de ondas en ríos o en el ingreso de la marea en cuerpos de agua relativamente angostos.

**Figura 1.** Evolución de un tsunami generado por remociones en masa.



Un caso lamentable de este tipo de fenómenos fue el tsunami del 21 de abril de 2007 en el fiordo Aysén (Naranjo *et al.*, 2009; Sepúlveda y Serey, 2009), donde el desconocimiento de la física del fenómeno, sumado a la falta de medidas de prevención y mitigación, resultaron en la pérdida de diez vidas y en el daño en instalaciones costeras. La Figura 1 muestra algunas imágenes de dicho evento.

**Figura 2.** Imágenes del tsunami el 21 de abril de 2007 en el Fiordo Aysén. a) Una de las remociones en masa que generó ondas de tsunami, b) máximo runup de 50 [m] en la Isla Mentirosa, delimitado por la pérdida de vegetación y c) onda inicial de 15 [m] aprox.



## 2. UNA NUEVA TEORÍA

Existen diversas teorías 1D de onda larga en el régimen de Boussinesq para canales rectos y de sección transversal arbitraria (e.g. Peregrine, 1968; Fenton y Nadler, 1995; Teng, 1997; Nachbim y Da Silva, 2012). No obstante, ninguna de ellas es capaz de dar cuenta de forma simultánea de i) secciones transversales de geometría arbitraria, ii) cambios apreciables de la geometría a lo largo del eje del canal, iii) curvatura en planta del canal y iv) bifurcaciones. Estas son características típicas de cuerpos de agua naturales relativamente angostos, como ríos, fiordos y estuarios. Para incorporar estas características, se propone una teoría de propagación de ondas largas en canales de sección arbitraria, con curvatura en el plano horizontal y bifurcaciones, que surge de la generalización de la teoría para canales rectos desarrollada por Winckler y Liu (2015). La presente teoría es una generalización de la propuesta por Teng y Wu (1997) para canales simétricos con una geometría que varía lentamente en la dirección del canal, y de la propuesta por Peregrine (1968) para canales uniformes de sección arbitraria. Asimismo, la teoría es compatible con las ecuaciones bidimensionales estándar de Boussinesq propuestas en su trabajo seminal por el mismo Peregrine (1967).

La teoría se construye mediante la integración de las ecuaciones de movimiento para un fluido sin viscosidad en la sección transversal del canal, incorporando explícitamente las condiciones de contorno en el fondo y en la superficie libre (sección 3). Las ecuaciones de gobierno resultantes, del tipo Boussinesq, permiten resolver el flujo en una dimensión a lo largo del canal, teniendo como incógnita la desnivelación media de la superficie y la velocidad longitudinal promedio en la sección. La ecuación de momento incluye coeficientes que dependen de la geometría de la sección transversal y que pueden ser calculados a través de problemas de contorno para cada sección, una vez conocida la batimetría. El hecho de que la evolución de las ondas se vea afectada por la geometría de la sección transversal del canal implica que ondas propagándose en canales de diferente sección exhibirán diferente comportamiento en el campo lejano.

En la sección 4 se amplía la teoría para considerar los efectos de amortiguamiento viscoso en la capa límite del fondo del canal, siguiendo la metodología analítica de Liu & Orfila (2004). Como consecuencia del déficit de momento en la capa límite provocado por los

efectos viscosos, se modifica la ecuación de continuidad para la región irrotacional añadiendo el flujo de masa desde la capa límite. Este enfoque analítico es apropiado para experimentos de laboratorio a pequeña escala en los cuales la capa límite es laminar o turbulenta. Fenómenos a mayor escala requieren la implementación de modelos turbulentos o fricción del fondo no están cubiertos en este documento.

En la sección 5 se introduce un esquema de resolución para canales con bifurcación, en el cual se definen dos regiones: el campo cercano a la unión y el campo lejano. En el campo cercano las ecuaciones de gobierno se reescalan considerando una dimensión típica de la unión, en tanto que en el campo lejano se siguen aplicando las ecuaciones derivadas en la sección 3. Para concluir, en la sección 6 se presenta un ejemplo de aplicación de ondas propagándose en un canal recto con una playa plana (Liu et al. 2006) y un segundo ejemplo que considera la unión de tres canales con geometría rectangular.

### 3. FUNDAMENTO TEÓRICO

El desarrollo en detalle de esta teoría está disponible en Winckler (2015) y acá se resumen los elementos esenciales para su comprensión. Las principales hipótesis son i) que el radio local de curvatura es mucho mayor que la longitud de onda, ii) que la profundidad y el ancho del canal son más pequeños que la longitud de onda, iii) que las paredes del canal son relativamente inclinadas, iv) que la geometría del canal cambia significativamente en una longitud de onda y v) que la dispersión de frecuencia es pequeña pero no despreciable, y equilibrada por la no linealidad.

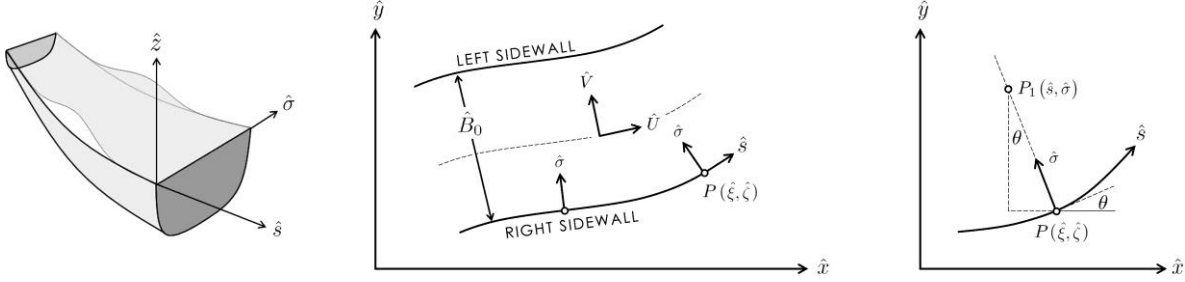
Consideremos un canal de sección arbitraria con un sistema curvilíneo ortogonal definido por  $(\hat{s}, \hat{\sigma}, \hat{z})$ , como se muestra en la Figura 3. Este sistema ha sido adoptado de la teoría propuesta por Dressler (1978) para cuantificar el efecto de la curvatura del fondo de un canal en las propiedades del flujo. La coordenada  $\hat{s}$  corresponde a la longitud de arco medida en el nivel estático a lo largo del borde derecho de canal,  $\hat{\sigma}$  denota la distancia medida ortogonal desde el borde al interior del canal y  $\hat{z}$  es la distancia vertical, positiva hacia arriba;  $\hat{z} = 0$  corresponde al nivel estático. Las variables con tongo son dimensionales y sin ellos adimensionales. El eje  $\hat{s}$  debe ser continuo y suave. La transformación entre coordenadas cartesianas  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  y el sistema curvilíneo ortogonal para un punto arbitrario ubicado en el nivel estático  $P_1(\hat{s}, \hat{\sigma}, \hat{z} = 0)$  es

$$\hat{x}(\hat{s}, \hat{\sigma}) = \hat{\xi} - \hat{\sigma} \sin \theta, \quad \hat{y}(\hat{s}, \hat{\sigma}) = \hat{\zeta} + \hat{\sigma} \cos \theta, \quad [1]$$

donde  $P$  es un punto  $\hat{x} = \hat{\xi}(\hat{s})$ ,  $\hat{y} = \hat{\zeta}(\hat{s})$  sobre el eje curvo de referencia,  $\theta(\hat{s})$  es el ángulo entre  $\hat{x}$  y el borde derecho del canal, medido en sentido anti-horario. La transformación entre coordenadas es útil para reducir la teoría para el caso de canales rectos. La velocidad  $\hat{U} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$  se define para las componentes longitudinal  $\hat{s}$ , transversal  $\hat{\sigma}$  y vertical  $\hat{z}$ , respectivamente. La curvatura se define como  $\hat{\kappa} = d\theta/d\hat{s}$ , donde  $\hat{\kappa} > 0$  para canales convexos y  $\hat{\kappa} < 0$  para canales cóncavos.

El sistema curvilíneo ortogonal debe ser uno a uno, lo que implica que cada elemento  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  corresponde exactamente a un elemento  $(\hat{s}, \hat{\sigma}, \hat{z})$ . Para un canal convexo con  $\hat{r} < 0$ , no se requiere de ninguna restricción. Para un canal cóncavo con  $\hat{r} > 0$ , no obstante, se requiere la restricción adicional de  $\hat{\sigma} < \hat{R}$ , donde  $\hat{R}$  es el radio de curvatura. Por ende, para que la teoría sea válida, el ancho del canal debe ser menor que el radio de curvatura, i.e.  $\hat{B}_0 < \hat{R}$ , donde  $\hat{B}_0$  es el ancho del canal en el nivel estático.

**Figura 3.** Sistema de coordenadas utilizado en la teoría.



La derivación de ecuaciones de gobierno se efectúa por medio de métodos asintóticos y magnitudes adimensionales definidas en función de las escalas típicas que describen la geometría del canal y el flujo. Este enfoque es útil ya que el orden de magnitud de los términos adimensionales, expresado en términos de parámetros pequeños, es explícita en las ecuaciones (Dingemans, 1997).

Para expresar las variables en términos adimensionales, se utiliza la longitud de onda característica  $\hat{\lambda}_0$  para escalar variables en la dirección longitudinal del canal. La profundidad característica  $\hat{h}_0$  es usada como la escala especial para dimensiones transversales y la amplitud de onda característica  $\hat{a}_0$  se usa para cuantificar los efectos de la superficie libre en el flujo. Se utiliza también el radio local de curvatura  $\hat{R}_0$  para escalar los efectos asociados a cambios de dirección en el canal. Los parámetros

$$\mu = \hat{h}_0/\hat{\lambda}_0, \quad \varepsilon = \hat{a}_0/\hat{h}_0, \quad [2]$$

se introducen como medidas adimensionales de la dispersión de frecuencias y la no-linealidad, respectivamente. La aproximación de Boussinesq implica que  $O(\varepsilon) = O(\mu^2) = 1$ . El escalamiento utilizado para todas las variables se presenta en Winckler (2015) y se omite en este documento por razones de espacio. Las variables se escalan de acuerdo a diferentes escalas típicas, siguiendo la relación  $\hat{R}_0 > \hat{\lambda}_0 > \hat{h}_0 > \hat{a}_0$ . El único nuevo escalamiento es introducido para la curvatura,  $\hat{r} = 1/\hat{R}$ , como sigue

$$\hat{r} = Y\kappa/\hat{\lambda}_0, \quad [3]$$

donde  $Y$  considera la intensidad de la curvatura respecto de la longitud del onda. Para  $Y = \mu$  el radio de curvatura es menor que para  $Y = \varepsilon$ . En ambos caso, no obstante, el radio de curvatura es bastante menor que la longitud de onda. La teoría se construye mediante la

integración de las ecuaciones de Euler en la sección transversal del canal, incorporando explícitamente las condiciones de contorno en el fondo y en la superficie libre. El detalle de la derivación para canales con curvatura en planta se presenta en Winckler (2015). En este documento presentamos las ecuaciones de gobierno para este tipo de canales pero focalizamos las aplicaciones en canales rectos donde  $\kappa = 0$ . La ecuación de conservación de la masa, promediada en la sección transversal del canal, en forma adimensional, es

$$\begin{aligned} \left(1 - \Upsilon\mu\kappa \frac{B_0}{2}\right) \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} + \varepsilon \frac{B'_0}{B_0} \tilde{\eta} \frac{\partial}{\partial s} (A_0 \langle u \rangle) + \frac{1}{B_0} \frac{\partial}{\partial s} ([A_0 + \varepsilon B_0 \tilde{\eta}] \langle u \rangle) \\ - \Upsilon\mu \frac{\kappa}{B_0} \left( \vartheta \langle u \rangle + \Gamma \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial s} \right) = O(\Upsilon\mu\varepsilon) \end{aligned} \quad [4]$$

donde  $\tilde{\eta}$  es la desnivelación media de la superficie,  $\langle u \rangle$  es y la velocidad longitudinal promedio en la sección,

$$A_0(s) = \int_0^{B_0} h(s, \sigma) d\sigma \quad [5]$$

es el área de la sección transversal del canal en estado de equilibrio estático,  $h$  la profundidad local y  $B'_0$  el talud del borde del canal en el nivel estático. Los coeficientes  $\vartheta$  y  $\Gamma$  que surgen de la curvatura son nulos para canales rectos o con secciones transversales simétricas, como los analizados en este documento. En concreto, para un canal recto  $\kappa, \vartheta, \Gamma = 0$ . La ecuación de conservación de momento, promediada en la sección transversal del canal, en forma adimensional, es

$$(1 + \mu^2\alpha - \Upsilon\mu\kappa\sigma_c) \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial s} + \varepsilon \langle u \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial s} + \mu^2\beta \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial t \partial s} + \mu^2\gamma \frac{\partial^3 \langle u \rangle}{\partial t \partial s^2} = O(\Upsilon\mu\varepsilon) \quad [6]$$

Donde el término asociado a  $\alpha$  representa una corrección a la aceleración local y el término que incluye a  $\beta$  está asociado a un decaimiento o amplificación de la amplitud causada por las variaciones bruscas de la geometría entre secciones consecutivas del canal. Ambos términos son despreciables cuando estas variaciones son suaves, es decir, cuando ocurren en una distancia equivalente a varias longitudes de onda. El término asociado a  $\gamma$  representa los efectos de dispersión de frecuencia, que son relevantes incluso para secciones uniformes. Los coeficientes de la ecuación de momento son

$$\alpha(s) = \frac{\partial}{\partial s} [\widetilde{\chi_1}|_{z=0}] - \frac{\partial \widetilde{\chi_1}}{\partial s}, \quad [7]$$

$$\beta(s) = \widetilde{\chi_1}|_{z=0} - \bar{\chi}_1 + \frac{\partial}{\partial s} [\widetilde{\chi_2}|_{z=0}] - \frac{\partial \widetilde{\chi_2}}{\partial s}, \quad [8]$$

$$\gamma(s) = \widetilde{\chi_2}|_{z=0} - \bar{\chi}_2, \quad [9]$$

donde las funciones  $\chi_1$  y  $\chi_2$  se obtienen a partir de la integración de los siguientes problemas de contorno para cada sección:

$$\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z^2} = 0, \quad -h(s, \sigma) < z < 0, \quad [10]$$

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial z} = -\frac{1}{B_0} \frac{dA_0}{ds}, \quad z = 0, \quad [11]$$

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial n} = -\frac{\partial h}{\partial s} / \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + 1}, \quad z = -h(s, \sigma), \quad [12]$$

y

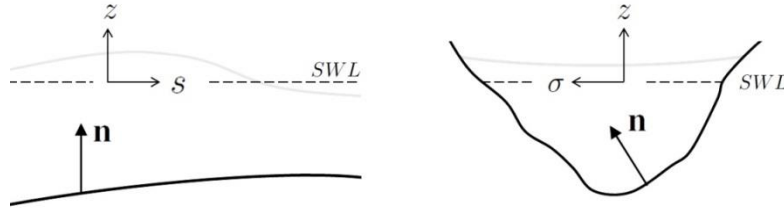
$$\frac{\partial^2 \chi_2}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z^2} = -1, \quad -h(s, \sigma) < z < 0, \quad [13]$$

$$\frac{\partial \chi_2}{\partial z} = -\frac{A_0}{B_0}, \quad z = 0, \quad [14]$$

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial n} = 0, \quad z = -h(s, \sigma), \quad [15]$$

Estos problemas de contorno representan la conservación de la masa [10,13], sujeta a condiciones de borde en la superficie [11,14] y de fondo [12,15] para cada sección, como se indica en la Figura 4. Las funciones  $\chi_1$  y  $\chi_2$  dependen exclusivamente de la geometría y los coeficientes  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  son calculados mediante diferencias finitas.

**Figura 4.** Sección transversal donde se resuelven los problemas de contorno.



Para un canal rectangular,  $\kappa, \vartheta, \Gamma = 0$  y las coordenadas  $s$  y  $\sigma$  corresponden a  $x$  e  $y$ , respectivamente. Las ecuaciones [4] y [6] se reducen a

$$\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} + \varepsilon \frac{B'_0}{B_0} \tilde{\eta} \frac{\partial}{\partial x} (A_0 \langle u \rangle) + \frac{1}{B_0} \frac{\partial}{\partial x} ([A_0 + \varepsilon B_0 \tilde{\eta}] \langle u \rangle) = O(\varepsilon^2, \varepsilon \mu^2, \mu^4) \quad [16]$$

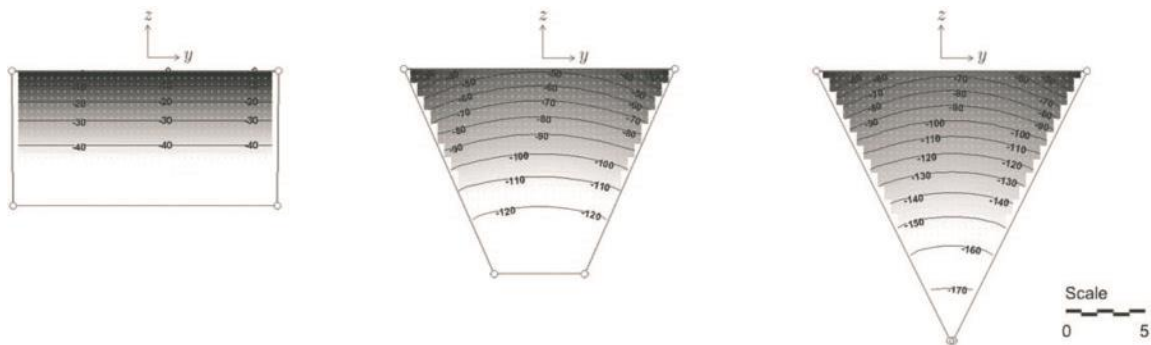
$$(1 + \mu^2 \alpha) \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x} + \varepsilon \langle u \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} + \mu^2 \beta \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial t \partial x} + \mu^2 \gamma \frac{\partial^3 \langle u \rangle}{\partial t \partial x^2} = O(\varepsilon^2, \varepsilon \mu^2, \mu^4) \quad [17]$$

Estas ecuaciones corresponden a las propuestas por Winckler y Liu (2015), en las cuales se incorporan los efectos de cambios rápidos en la geometría mediante los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$ . Estos efectos no son capturados en la teoría de Teng y Wu (1997), en la cual  $\alpha, \beta = 0$  incluso para canales con cambios bruscos en la geometría. Tampoco se consideran en la

teoría propuesta por Peregrine (1968) para canales uniformes de sección arbitraria. Los efectos dados por los términos asociados a  $\alpha$  y  $\beta$  corresponden a la contribución más significativa de esta nueva teoría.

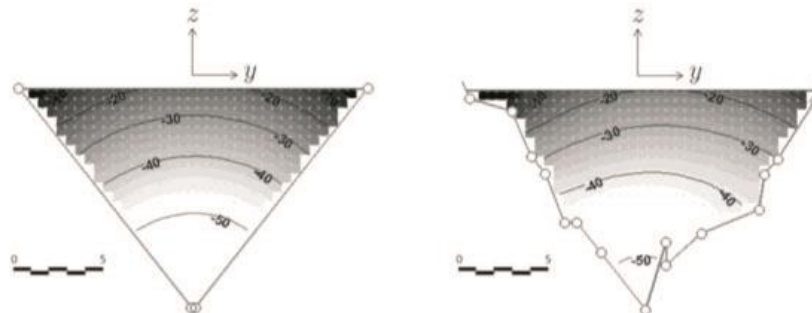
La solución del problema de contorno para  $\chi_2$  [13-15] permite calcular  $\gamma$  para diferentes secciones con idéntico ancho superficial y área de sección transversal, como se muestra en la Figura 5. El coeficiente es menor en la sección rectangular que en la triangular, lo que implica que la dispersión de frecuencias, representada por el término  $\mu^2\gamma(u)_{\text{tXX}}$  en la ecuación [17], es más relevante en secciones que se alejan de la geometría rectangular.

**Figura 5.** Función  $\chi_2(y, z)$  para una sección rectangular ( $\gamma = -33.7$ ), dos secciones trapezoidales ( $\gamma = -55.6$ ) y una sección triangular ( $\gamma = -63.1$ ).



Otro hallazgo interesante es que el coeficiente  $\gamma$  es poco sensible a las pequeñas perturbaciones la batimetría. A modo de ejemplo, en la Figura 6 se muestra la función  $\chi_2$  para una sección triangular y para una sección irregular de forma aproximadamente triangular, con idénticas áreas y anchos superficiales. Los coeficientes son cercanos ( $\gamma = -21.76$  y  $-21.84$ ), implicando que las propiedades dispersivas de un tren de ondas no son significativamente afectadas por perturbaciones menores en la batimetría.

**Figura 6.** Función  $\chi_2(y, z)$  para una sección triangular ( $\gamma = -21.76$ ) y una sección irregular de forma aproximadamente triangular ( $\gamma = -21.84$ ).





#### 4. EFECTOS DE LA VISCOSIDAD

Winckler (2015) extendió la teoría de Liu y Orfila (2004) para cuantificar los efectos de la viscosidad en la capa límite de fondo en un canal de sección arbitraria. En esta teoría el dominio se divide en la capa límite en el fondo y una región bastante mayor donde la velocidad se asume esencialmente irrotacional.

Un resultado interesante de la teoría de Liu y Orfila (2004) es que la capa límite genera un déficit de momento forzado por el gradiente de la velocidad en la región irrotacional, que a su vez induce flujos de masa entre ambas regiones. Como consecuencia, la ecuación de continuidad se modifica añadiendo este flujo de masa en forma de una integral de convolución. Los efectos de la capa límite de la superficie, por otra parte, se descuidan. Para un canal rectangular, la ecuación de continuidad [16] se modifica como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} + \varepsilon \frac{B'_0}{B_0} \tilde{\eta} \frac{\partial}{\partial x} (A_0 \langle u \rangle) + \frac{1}{B_0} \frac{\partial}{\partial x} ([A_0 + \varepsilon B_0 \tilde{\eta}] \langle u \rangle) \\ - \frac{\delta}{\mu} \left( \frac{1 + 2h/B_0}{\sqrt{\pi}} \right) \int_0^t \frac{\partial \langle u(x, \tau) \rangle / \partial x}{\sqrt{t - \tau}} d\tau = O(\varepsilon^2, \varepsilon \mu^2, \mu^4) \end{aligned} \quad [18]$$

Donde  $\delta^2 = \hat{v} / \hat{\lambda} (\hat{g} \hat{h}_0)^{1/2}$  representa una medida de los efectos de viscosidad cinemática de agua, de  $\hat{v} = 10^{-6}$  m/s. Aquí se asume  $\delta = O(\varepsilon^2, \mu^4)$ , de forma que los efectos viscosos son levemente inferiores a la dispersión de frecuencias y a la no-linealidad, pero no lo suficiente pequeños para ser descartados. La ecuación de momento [17] permanece inalterada. Este enfoque analítico dado por [17,18] es apropiado para experimentos de laboratorio a pequeña escala en los cuales la capa límite es laminar o turbulenta.

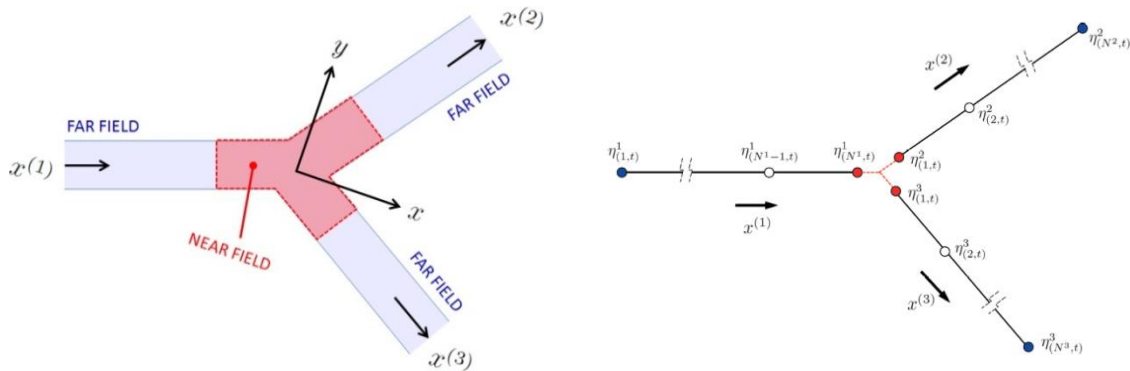
#### 5. BIFURCACIONES

Winckler (2015) derivó ecuaciones de compatibilidad para resolver bifurcaciones en redes de canales. Para derivar estas ecuaciones, el dominio físico se divide en un campo cercano a la unión y el campo lejano (Figura 7, izquierda). En el campo cercano las ecuaciones de gobierno se reescalan considerando una dimensión típica de la unión, en tanto que en el campo lejano se siguen aplicando las ecuaciones [16,17] en caso de no considerarse el efecto de la capa límite. Este enfoque es esencialmente similar al utilizado por Mei et al. (2005) para resolver la propagación de ondas en un canal con una discontinuidad en la profundidad.

La dimensión del campo cercano se hace tender a cero, lo que implica que en términos numéricos, la unión se resuelve con un nodo común a los ramales convergentes (Figura 7, derecha). En una primera aproximación con error de orden  $O(\mu)$ , las ecuaciones de compatibilidad son bastante simples. La ecuación de conservación de la masa se reduce a

$$\sum_{i=1}^{N_{in}} B_0^{(i)} \langle u_n \rangle^{(i)} - \sum_{i=1}^{N_{out}} B_0^{(i)} \langle u_n \rangle^{(i)} = O(\mu), \quad [19]$$

**Figura 7.** Esquema de definición del campo cercano y campo lejano en una bifurcación (izquierda). Esquema de resolución numérica en un nodo común a tres ramales.



donde  $N_{in}$  and  $N_{out}$  corresponde al número secciones de entrada y salida a la unión,  $\langle u_n \rangle^{(i)}$  es la velocidad longitudinal promedio en la sección y  $B_0^{(i)}$  es el ancho superficial en cada ramal. La ecuación de conservación de momento, por otro lado, es

$$\nabla \eta = O(\mu). \quad [20]$$

En la aproximación más gruesa, las ecuaciones [19,20] implican que en la unión la superficie libre debe ser horizontal y la suma de los flujos entrantes es balanceada por la suma de flujos salientes. En este orden de aproximación se pierde información sobre el patrón del oleaje dentro de la unión. Se observa asimismo que el ángulo entre los diferentes ramales no es relevante en la modulación de las características del flujo resultante.

Las ecuaciones [19,20] tienen un error de orden  $O(\mu)$ , por lo que corresponden a una teoría lineal y no dispersiva, que puede utilizarse para la unión junto con las ecuaciones débilmente no-lineales y débilmente dispersivas [16,17] bajo el supuesto de que los fenómenos de dispersión de frecuencias y no-linealidad –esencialmente acumulativos– no son relevantes en una unión de dimensiones infinitesimales. En la presentación se incluirán ejemplos preliminares de flujos en bifurcaciones de geometría sencilla.

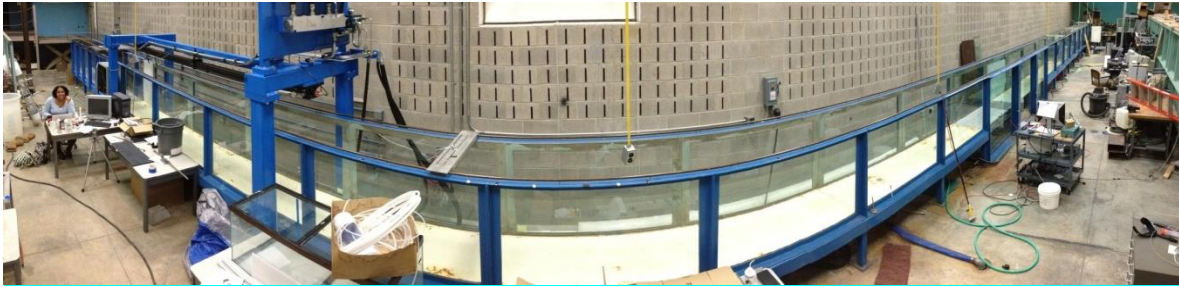
## 6. APLICACIONES

Para efectos de ilustración, se compara la teoría con mediciones experimentales efectuadas por Liu et al. (2006) en un canal rectangular con una playa con pendiente 1:20 (Figura 8). Los experimentos fueron realizados en un tanque de 32 [m] de largo, 0.6 [m] de ancho y 0.9 [m] de profundidad, ubicado en el DeFrees Hydraulics Laboratory de Cornell University. La profundidad se fijó en 0.15 [m] y se midió la desnivelación instantánea asociada a una onda solitaria cada 2.5 [m] en la sección uniforme y cada 0.5 [m] en la playa.

La teoría dada por [17,18] se resuelve utilizando un esquema numérico de Adams–Bashforth–Moulton de cuarto orden en tiempo y espacio (Wei y Kirby, 1995). Los

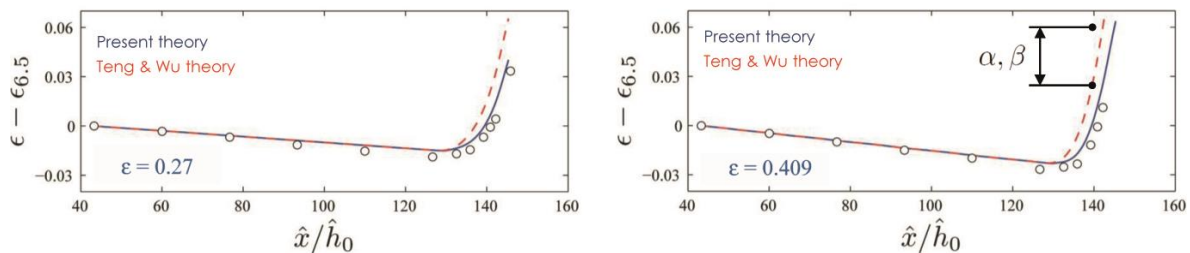
resultados de las comparaciones entre los experimentos y la teoría se presentan en la Figura 9. Se incluye también la teoría de Teng & Wu (1997), que corresponde a la teoría más completa disponible a la fecha. Cabe mencionar que los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  son nulos en la sección uniforme, por lo que la nueva teoría coincide exactamente con la teoría de Teng & Wu (1997). En la playa, no obstante, las teorías difieren pues la sección cambia significativamente en una longitud de onda.

**Figura 8.** Canal de onda larga utilizado en experimentos de Liu et al. (2006).



En la zona uniforme, ambas teorías coinciden y reproducen de buena manera el decaimiento de altura debido a los efectos de la viscosidad en la capa límite de fondo. Este decaimiento es lineal con la distancia. En la zona de asomeramiento, en contraste, se observa un ajuste más preciso con la presente teoría como consecuencia de los nuevos términos asociados a  $\alpha$  y  $\beta$ , que rescatan los efectos de cambios bruscos en la sección. Cabe mencionar que las diferencias en la amplitud entre la teoría de Teng & Wu (1997) y la presente teoría son del orden de 10% en distancias de propagación comparables a una longitud de ola. Ello implica que para distancias mayores, la diferencia entre ambas teorías -en caso de darse en geometrías con cambios bruscos- puede ser significativa.

**Figura 9.** Diferencia de la amplitud de onda, referida a la amplitud medida en  $\hat{x} = 6.5$  m en un canal uniforme con una playa. Los círculos corresponden a mediciones experimentales.



## 7. CONCLUSIONES

Se presenta un conjunto de herramientas destinadas a mejorar la comprensión física de propagación de ondas largas en canales de sección arbitraria, con curvatura en planta y bifurcaciones. La nueva teoría es una generalización de aquella derivada para canales rectos

(Winckler y Liu, 2015) y permite reproducir en forma adecuada los cambios bruscos en la geometría del canal, no son considerados en teorías anteriores (e.g. Peregrine, 1968; Teng y Wu, 1997). Se presentan también condiciones de compatibilidad para bifurcaciones que bajo ciertos supuestos se pueden combinar con la nueva teoría para modelar la propagación de ondas en canales con ramificaciones. Finalmente, la inclusión de los efectos viscosos generados en la capa límite permiten caracterizar en forma precisa el decaimiento de la amplitud observada en experimentos a pequeña escala. El nuevo conjunto de herramientas se puede utilizar en una variedad de problemas. Por ejemplo, los tiempos de viaje y alturas máximas de un tsunami generado por remociones en masa pueden estimarse rápidamente con la presente teoría, haciéndola adecuada para sistemas de alerta en fiordos.

## **AGRADECIMIENTOS**

Se agradece el financiamiento entregado por la National Science Foundation, de EEUU. Patricio Winckler agradece a Fulbright, CONICYT y la Universidad de Valparaíso por el financiamiento de los estudios doctorales en EEUU.

## **REFERENCIAS**

Dingemans, M. (1997). Water wave propagation over uneven bottoms. Part 2. Non-linear wave propagation, volume 13 of Advanced Series on Ocean Engineering. World Scientific, 1997.

Dressler, R. F. (1978). New nonlinear shallow-flow equations with curvature. *Journal of Hydraulic Research*, 16(3):205-222.

Fenton J.D. and Nalder, G.V. (1995) . Long wave equations for waterways curved in plan. In 26th Congress of the International Association for Hydraulic Research, London. International Association for Hydraulic Research, 11-15 September 1995.

Harbitz, C.B.; Glimsdal, S.; Lovholt, F.; Kveldevik, V.; Pedersen G. K. and Jensen, A. (2014). Rockslide tsunamis in complex fjords: From unstable rock slope at Akerneset to tsunami risk in western Norway. *Coastal Engineering*, 88:101–122.

Liu, P. L.-F. and Orfila, A. (2004). Viscous effects on transient long-wave propagation. *Journal of Fluid Mechanics*, 520, 83-92.

Liu, P. F., Simarro, G., Vandever, J., & Orfila, A. (2006). Experimental and numerical investigation of viscous effects on solitary wave propagation in a wave tank. *Coastal Engineering*, 53(2), 181-190.

Mei, C.C.; Stiassnie, M. and Yue, D. K.-P. (2005). Theory and applications of ocean surface waves. Part 2: Nonlinear aspects, volume 23 of Advanced Series on Ocean Engineering. World Scientific.

Nachbin, A. and Da Silva, V. (2012). Solitary waves in open channels with abrupt turns and branching points. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 19:1-21.

Naranjo, J. et al. (2009), Mass movement-induced tsunamis main effects during the Patagonian. *Andean Geology* 36 (1): 137-145.

Peregrine, D. H. (1967). Long waves on a beach. *Journal of Fluid Mechanics*, 27:815–827.

Peregrine, D.H. (1968). Long waves in a uniform channel of arbitrary cross-section. *Journal of Fluid Mechanics*, 32:353-365.

Sepúlveda, S. y Serey, A. (2009). Tsunamigenic, earthquake-triggered rock slope failures during the April 21 2007 Aisén earthquake. *Andean Geology* 36 (1): 131-136.

Teng, M. and Wu, T. (1997). Effect of cross-sectional geometry on long wave generation and propagation. *Physics of Fluids*, 9(11):1-10.

Wei, G. and Kirby, J. T. (1995). Time dependent numerical code for extended Boussinesq equations. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*. ASCE, 121(5):251-261.

Winckler, P. (2015). Long waves in channels of non-uniform cross-section. PhD. dissertation, School of Civil and Environmental Engineering, Cornell University.

Winckler, P. and Liu, P. L. F. (2015). Long waves in a straight channel with non-uniform cross-section. *Journal of Fluid Mechanics*. 770:156-188.